

Teoría de conjuntos aplicada a las Probabilidades



Reinaldo Jiménez Santamaría

George Cantor (1845-1918)



George Cantor (1845-1918) fue quien prácticamente formuló de manera individual la teoría de conjuntos a finales del siglo XIX y principios del XX. Su objetivo era el de formalizar las matemáticas como ya se había hecho con el cálculo cien años antes. Cantor comenzó esta tarea por medio del análisis de las bases de las matemáticas y explicó todo basándose en los conjuntos (por ejemplo, la definición de función se hace estrictamente por medio de conjuntos). Este monumental trabajo logró unificar a las matemáticas y permitió la comprensión de nuevos conceptos.

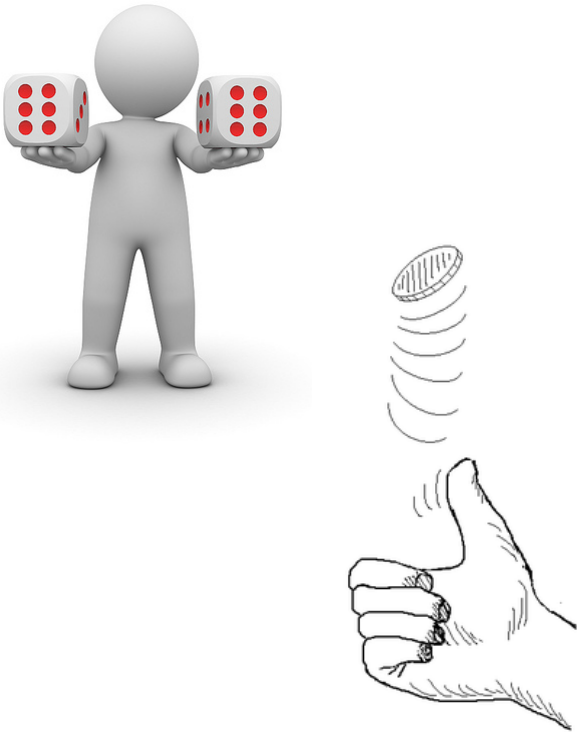
La teoría de probabilidades es una herramienta con la cual se pretende modelar y tratar con situaciones que se expresan en el lenguaje habitual, por ejemplo: “probablemente”, “es poco probable”, “hay mucha probabilidad de que...”. Estas frases hacen referencia a cierta incertidumbre.



La teoría de la probabilidad proporciona una base para evaluar la fiabilidad de las conclusiones alcanzadas, y las inferencias realizadas cuando se aplican las técnicas estadísticas a la recogida, análisis e interpretación de los datos.

El objetivo del cálculo de probabilidades es el estudio de métodos de análisis del comportamiento de fenómenos aleatorios, los cuales se pueden reproducir un gran número de veces, en condiciones similares, dando lugar a un conjunto de dos o más posibles resultados. Estos fenómenos pueden ser de dos tipos:

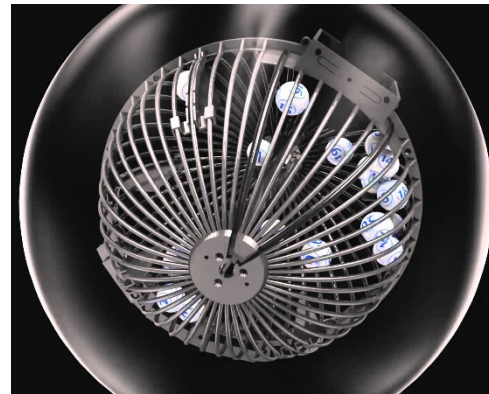
a) Aleatorios



b) Determinísticos



Conceptos básicos



Experimentos determinísticos:

Los estudios en los cuales hay acontecimientos predeterminados, es decir, aquellos en los que podemos predecir el resultado antes de que finalicen, o incluso antes de que comiencen, se denominan experimentos determinísticos.

Ejemplo 1. Si dejamos caer una botella de vidrio desde 10 metros de altura, podemos predecir con certeza lo que le pasará a la botella al caer sobre una plataforma de hierro.

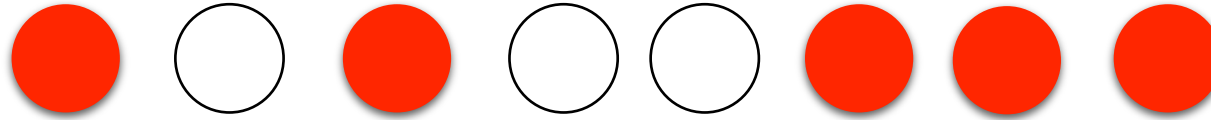
Ejemplo 2. Al tirar un fósforo encendido en un tarro abierto y lleno de gasolina, podemos predecir lo que ocurrirá con ese combustible.

Ejemplo 3. Al calentar un cilindro con agua, podemos predecir sin duda lo que pasará con el líquido, cuando la temperatura llegue a los 100°.

Experimentos aleatorios:

Se denomina de esta forma, a aquellos en los que no se puede predecir el resultado, antes de realizar la experiencia.

Ejemplo 1. Al extraer al azar una bola de una caja en la cual hay bolas blancas y rojas, no podemos predecir con certeza el color de la muestra que sacaremos.



Ejemplo 2. Al lanzar un dado, no podemos predecir con certeza el número que quedara en la cara superior.



Ejemplo 3. Al lanzar una moneda sobre una mesa, no podemos predecir con certeza si caerá corona o escudo.

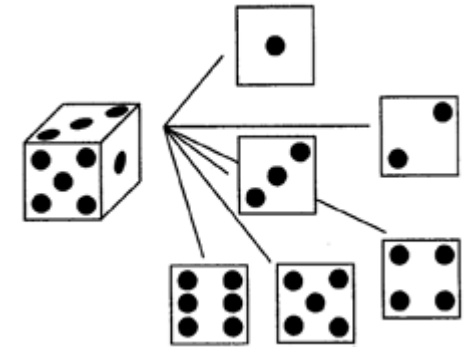


Espacio muestral:

Denominaremos así al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Ejemplo 1. Los resultados posibles del lanzamiento de un dado sobre una mesa, respecto del número de la cara superior de este, es el espacio muestral denotado E , el cual se define por extensión y compresión respectivamente, así:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; E = \{x / x \in \mathbb{Z}, 0 < x < 7\}$$



Ejemplo 2. Los resultados posibles del lanzamiento de una moneda sobre una mesa, son dos, a saber: corona y escudo. El espacio muestral se expresa, así: $E = \{C, E\}$

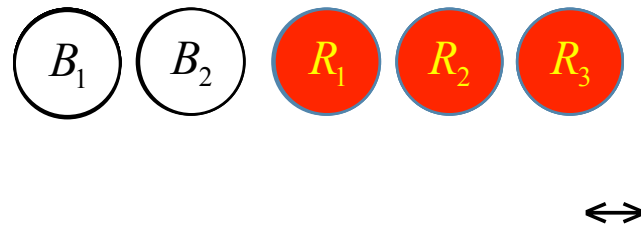


Ejemplo 3. Si tenemos una caja con 2 bolas blancas y 3 rojas y extraemos al azar dos bolas sin reposición, el espacio muestral asociado a este experimento, lo construiremos haciendo las combinaciones, así:

$$B_1 B_2 \leftrightarrow R_1 R_2 R_3$$

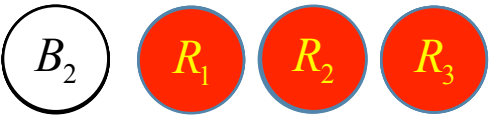
La bola B_1 la combinamos con cada una de las 4 restantes que están delante de ella e invertimos las parejas, así:

$$B_1 B_2, B_1 R_1, B_1 R_2, B_1 R_3 \leftrightarrow B_2 B_1, R_1 B_1, R_2 B_1, R_3 B_1$$



La bola B_2 la combinamos con cada una de las 3 bolas que están delante de ella e invertimos las parejas, así:

$$B_2 R_1, B_2 R_2, B_2 R_3 \leftrightarrow R_1 B_2, R_2 B_2, R_3 B_2$$



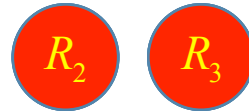
La bola R_1 la combinamos con cada una de las 2 bolas que están delante de ella e invertimos las parejas, así:

$R_1 R_2, R_1 R_3 \leftrightarrow R_2 R_1, R_3 R_1$



Terminamos emparejando la bola R_2 con la bola R_3 y viceversa, así:

$R_2 R_3 \leftrightarrow R_3 R_2$



El espacio muestral de este experimento, queda conformado con los 20 elementos anteriores.

Los espacios muestrales se clasifican en discretos y continuos.

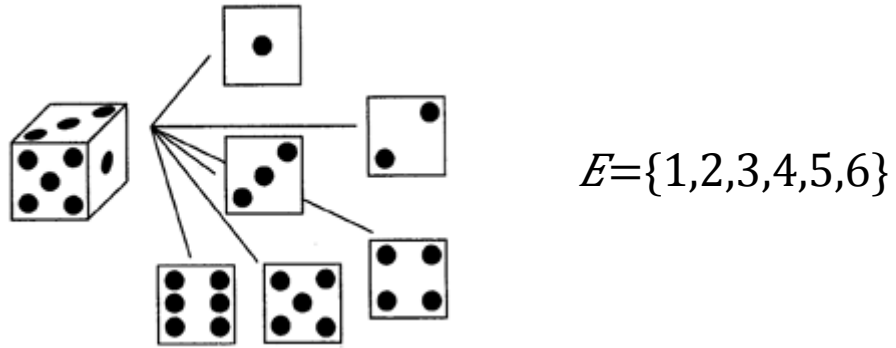
Espacio muestral discreto: Este es el resultado de hacer *conteos* de objetos, sus elementos por lo general son subconjuntos de números enteros.

Espacio muestral continuo: Son espacios muestrales cuyos elementos resultan de hacer *mediciones*, siendo, por lo general, intervalos del conjunto de los números reales.

Suceso o evento: Llamaremos así a cualquier subconjunto del espacio muestral, es decir, un conjunto de posibles resultados que surgen de un experimento aleatorio.

De acuerdo con lo anterior, si A es un evento de un espacio muestral E , entonces A es un subconjunto de E , lo cual simbólicamente se expresa $A \subset E$

Ejemplo 1. Al lanzar un dado, el espacio muestral es



De este conjunto se pueden sacar 64 eventos. Veamos 4 de ellos:

Números pares: $A = \{2, 4, 6\} \Rightarrow A \subset E$

Números impares: $B = \{1, 3, 5\} \Rightarrow B \subset E$

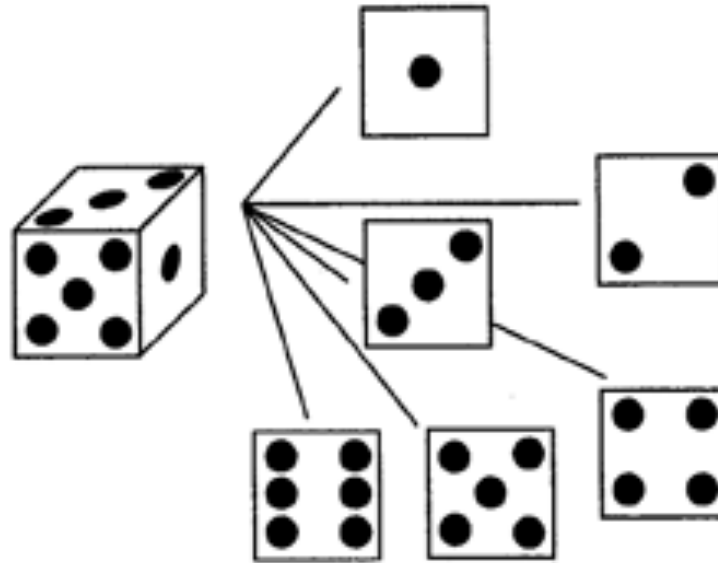
Números primos: $C = \{2, 3, 5\} \Rightarrow C \subset E$

Números compuestos: $D = \{4, 6\} \Rightarrow D \subset E$

Evento simple o elemental:

Se denominará de esta forma a un subconjunto formado por un único elemento del espacio muestral.

Ejemplo 1. Al tirar un dado, los eventos simples son 6: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$. Cada uno de estos posibles resultados es un evento simple o elemental.



Ejemplo 2. Al sacar, sin reposición, dos bolas de una urna que contiene una roja y dos negras, los 6 eventos simples son:

$\{RN\downarrow 1\}; \{RN\downarrow 2\}; \{N\downarrow 1\ N\downarrow 2\}; \{N\downarrow 1\ R\}; \{N\downarrow 2\ N\downarrow 1\}$



Ejemplo 3. Al sacar, con reposición, dos bolas de una urna que contiene una roja y dos negras, obtenemos 9 eventos simples: puesto que al sacar una bola, y anotar el color y devolverla a la bolsa, hasta completar todos los casos posibles se obtienen los 9 eventos simples

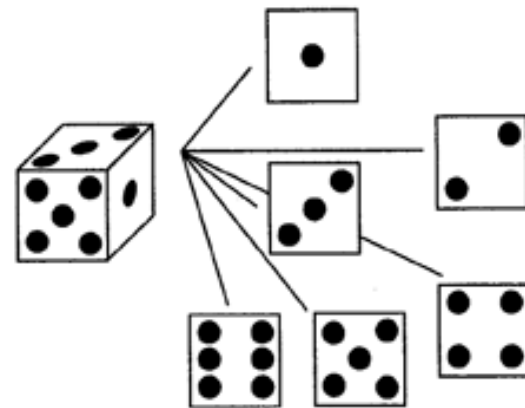
$\{RR\}; \{RN\downarrow 1\}; \{RN\downarrow 2\}; \{N\downarrow 1\ N\downarrow 2\}; \{N\downarrow 1\ N\downarrow 1\}; \{N\downarrow 2\ N\downarrow 2\}; \{N\downarrow 1\ R\}; \{N\downarrow 2\ R\}; \{N\downarrow 2\ N\downarrow 1\}$



Eventos compuestos: Se refiere a los subconjuntos del espacio muestral, formados por dos o más elementos.

Ejemplo 1. Al tirar un dado, el espacio muestral es el conjunto E, que por extensión se define así:

$$E=\{1,2,3,4,5,6\}.$$



Los eventos $A=\{1,3,5\}$; $B=\{2,3,5\}$; $C=\{2,4,6\}$ y $D=\{4,6\}$ constituyen 4 eventos compuestos, los cuales son subconjuntos de E.

El evento A está formado por tres números impares, el evento B por tres números primos, el evento C por tres números pares y el evento D por dos números compuestos.

Eventos posibles: Se refiere a todo resultado que se puede obtener al realizar un experimento.

Ejemplo 1. El nacimiento de una niña a las dos de la tarde, en la sala de maternidad de la Clínica Hera, es un evento posible.



Ejemplo 2. Al lanzar un dado sobre la mesa, obtener un 5 es uno de los seis eventos posibles.

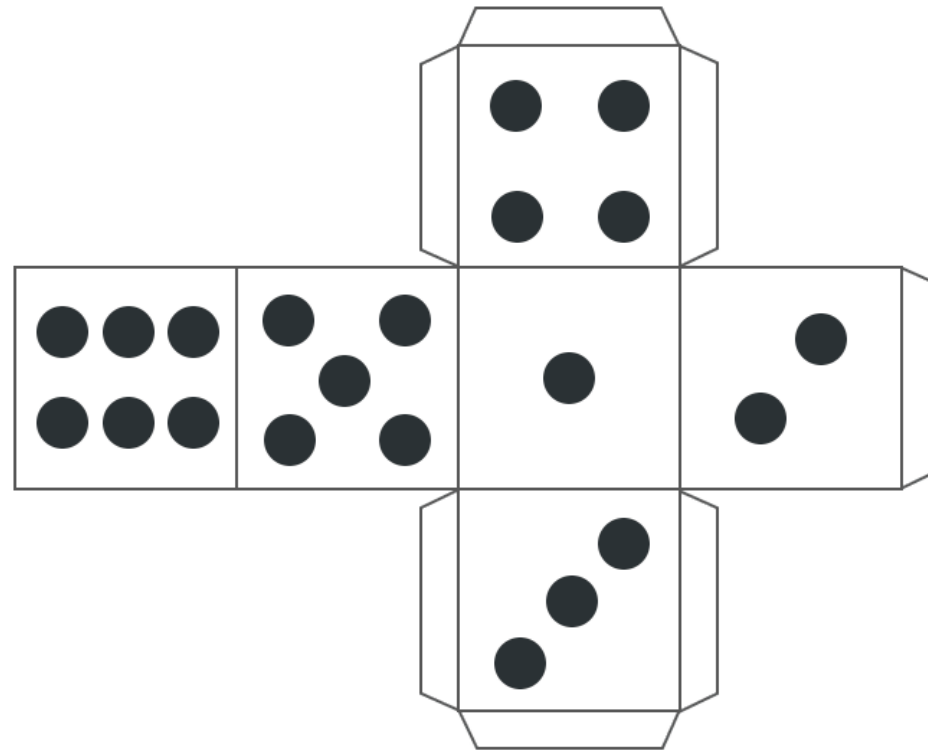


Ejemplo 3. Que el 100% de los estudiantes de la sección 11 – B, del Colegio Petry, obtengan bachillerato de honor, también es un evento posible.



Eventos imposibles: Se refiere al tipo de resultado que no se puede obtener al realizar un determinado experimento. Por lo tanto, el evento es vacío y se denota con el símbolo $\emptyset$.

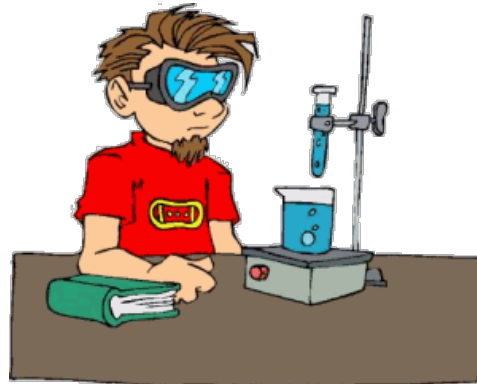
Ejemplo 1. Al lanzar un dado, obtener un 7 es un evento imposible, pues de las 6 caras, ninguna tiene el número 7.



Ejemplo 2. Que nazca un niño con un completo desarrollo de sus facultades sensitivas e intelectuales, a los dos meses de gestación, constituye un evento imposible.

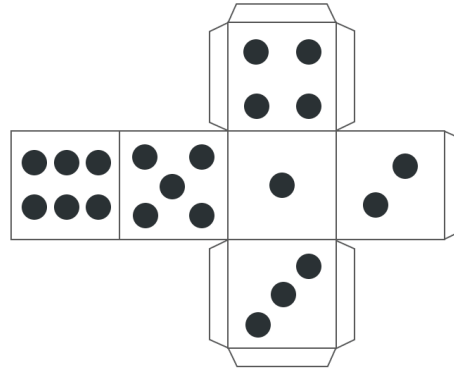


Ejemplo 3. Resulta un evento imposible que al mezclar 2 litros de agua con 3 litros de gasolina se obtengan 5 litros de gas pimienta.



Eventos seguros: Son resultados que, con toda certeza, siempre ocurrirán.

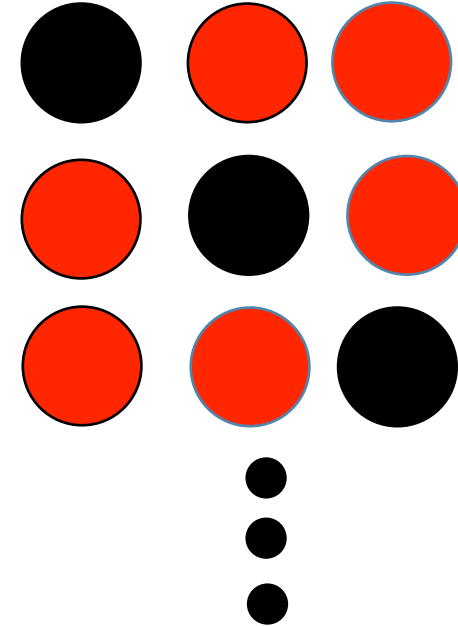
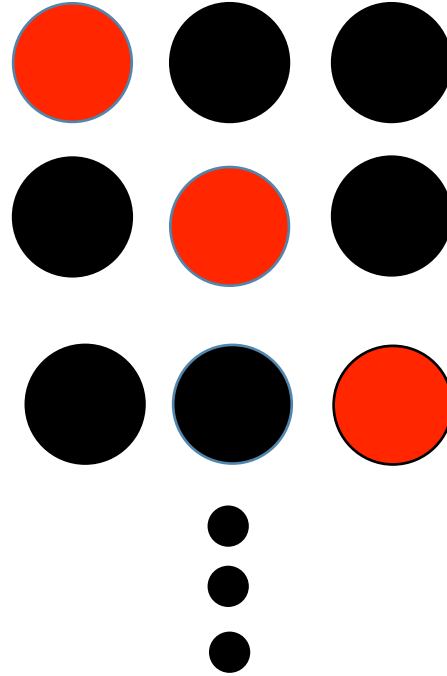
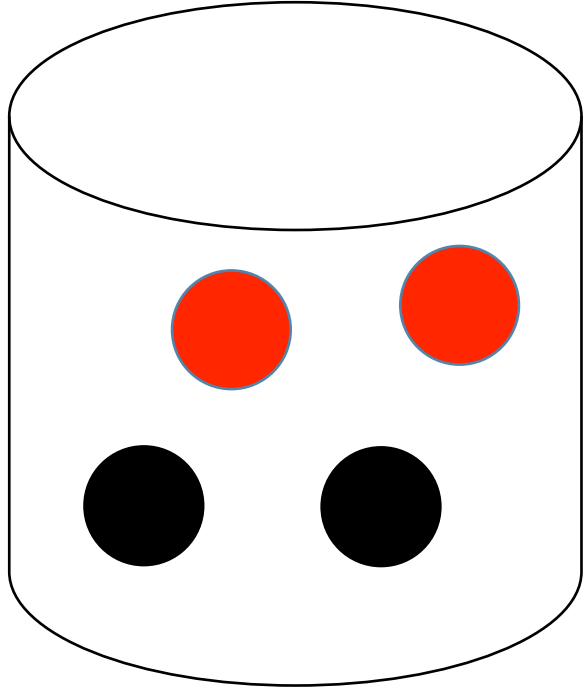
Ejemplo 1. Al lanzar un dado, obtener un "número menor de 7" es un evento seguro, pues todos los resultados posibles serán menores que 7.



Ejemplo 2. Es un evento seguro, que al sumergir personas en el mar, a una profundidad de 100 metros (y sin protección), estas se ahoguen.



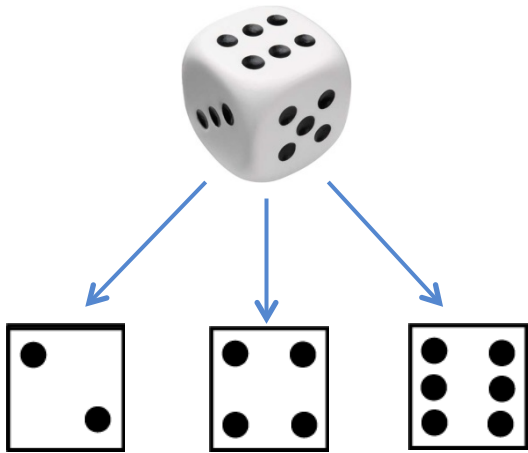
Ejemplo 3. Si tenemos una urna con 2 bolas rojas y 2 negras, y sacamos al azar tres bolas, con toda certeza, al menos una de ellas es negra. Esto constituye un evento seguro.



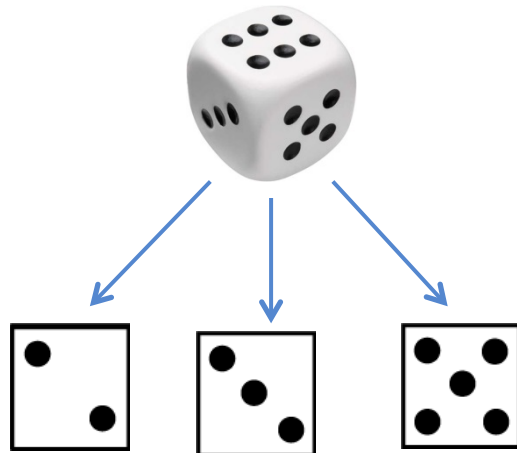
Eventos compatibles: Dos eventos, A y B, son compatibles cuando tienen al menos un elemento en común.

Ejemplo 1. Del lanzamiento de un dado, el suceso A supone obtener “un número par” y el suceso B supone obtener “un número primo”. A y B son compatibles por tener al 2 como elemento común. Lo cual se expresa $A \cap B = \{2\}$

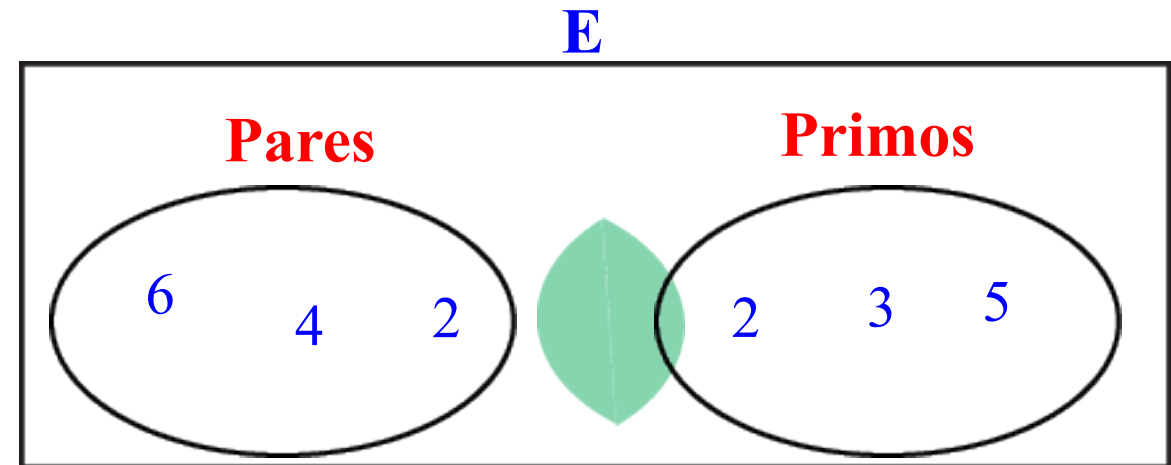
Suceso A



Suceso B



Diagramas de Venn

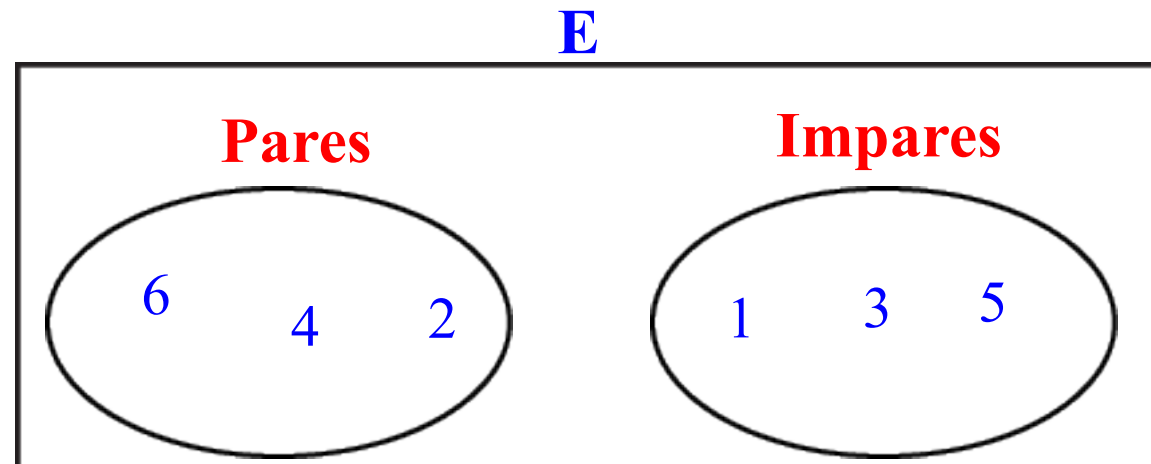


Elemento común

Eventos incompatibles: Dos eventos, A y B, son incompatibles si no tienen ningún elemento en común.

Ejemplo 1. Al lanzar un dado, el suceso A busca obtener “un número par” y el evento B busca obtener “un número impar”. A y B son eventos incompatibles, por no tener elementos comunes. Lo cual se expresa $A \cap B = \{ \} = \emptyset$. Veamos la representación gráfica de los tres conjuntos en un diagrama de Venn.

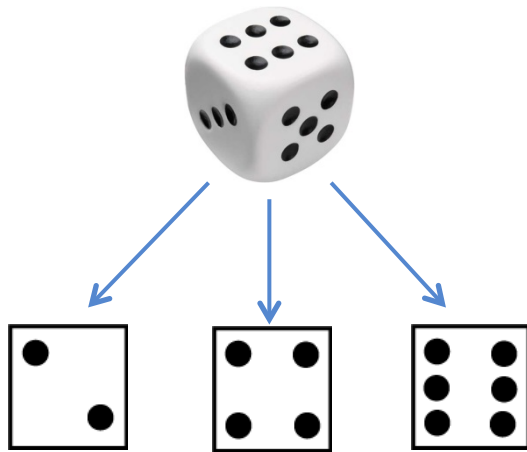
Diagramas de Venn



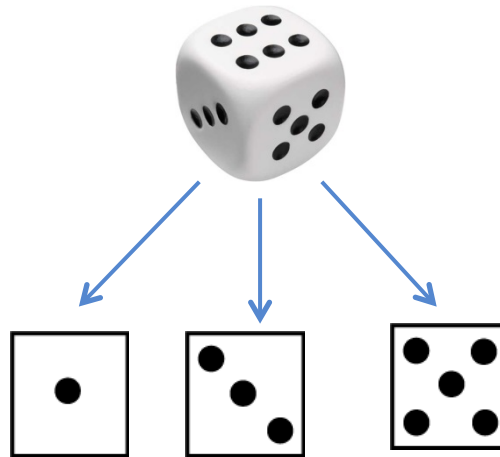
Eventos mutuamente excluyentes: Se denomina así a los eventos que no tienen elementos comunes, o que no pueden ocurrir al mismo tiempo. Un evento mutuamente excluyente, es aquel en el cual la ocurrencia de una alternativa, automáticamente excluye otras posibles alternativas.

Ejemplo 1. Del lanzamiento de un dado, obtener un número impar y un número par, son eventos mutuamente excluyentes, ya que al caer impar se excluyen los números pares o viceversa. Ambos eventos no pueden ocurrir al mismo tiempo, pues no tienen elementos comunes.

Pares

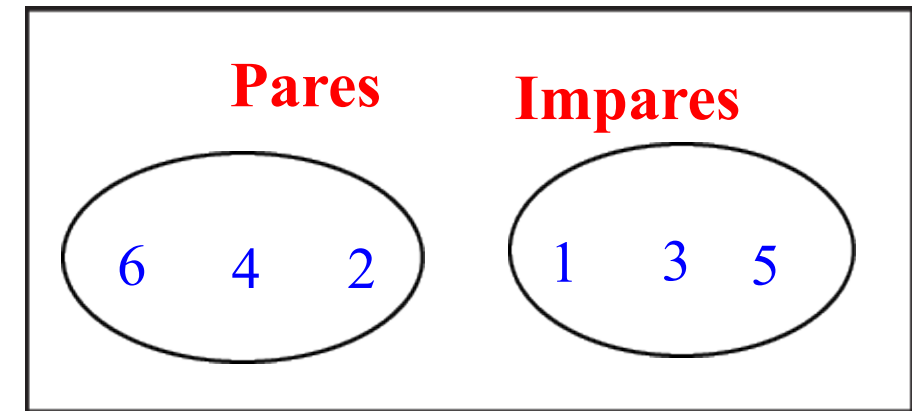


Impares

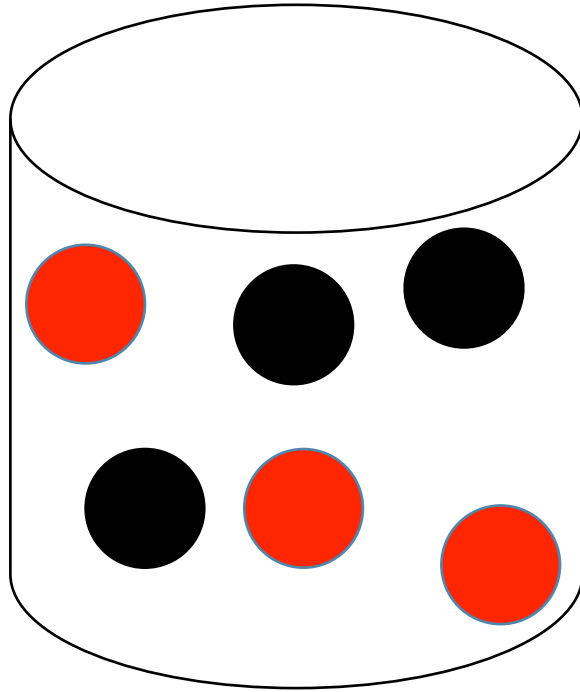


Diagramas de Venn

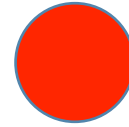
E



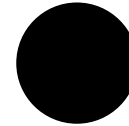
Ejemplo 2. En una urna hay 3 bolas rojas y 3 bolas negras. Si se extrae al azar una bola, se definirán los eventos A y B. El evento A corresponde a extraer una bola roja y B a extraer una bola negra. Ambos son mutuamente excluyentes por no tener elementos comunes.



Evento A



Evento B



Ejemplo 3. Al lanzar una moneda, dos eventos posibles son, o que muestre corona o muestre escudo, lo cual son fenómenos mutuamente excluyente, debido a que no pueden ocurrir las dos alternativas al mismo tiempo.



Eventos iguales: Dos eventos, A y B, son iguales, si y solo si, tienen exactamente los mismos elementos, lo cual se denota $A=B$.

Teorema para determinar la igualdad de dos eventos: Si tenemos dos eventos cualesquiera A y B, en donde A está contenido en B y B está contenido en A, entonces $A=B$. Esto simbólicamente se expresa, así:

$$A \subset B \quad y \quad B \subset A \Rightarrow A = B$$

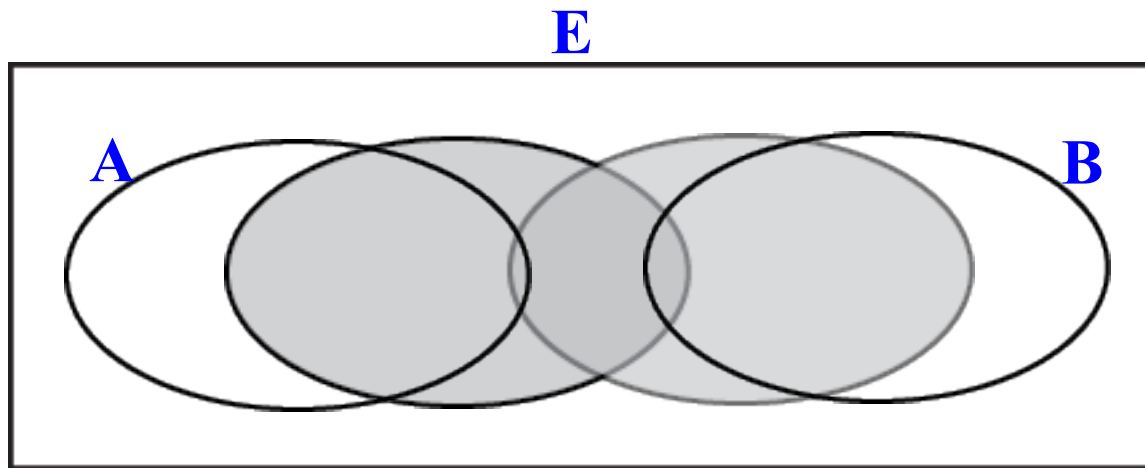
Operaciones con eventos

Unión de eventos: Supóngase dos eventos, A y B, del espacio muestral E. La unión de A con B, se denota $A \cup B$, y es el evento formado por todos los elementos de A o de B. Es decir, la unión de los eventos A y B se verifica cuando ocurre uno de los dos o ambos.

Si $x \in A \cup B$ entonces $x \in A$ o $x \in B$

$A \cup B$ se lee como “**A unión B**”. La expresión A o B es equivalente a $A \cup B$. Simbólicamente se expresa, así:

$$A \text{ o } B = A \cup B$$

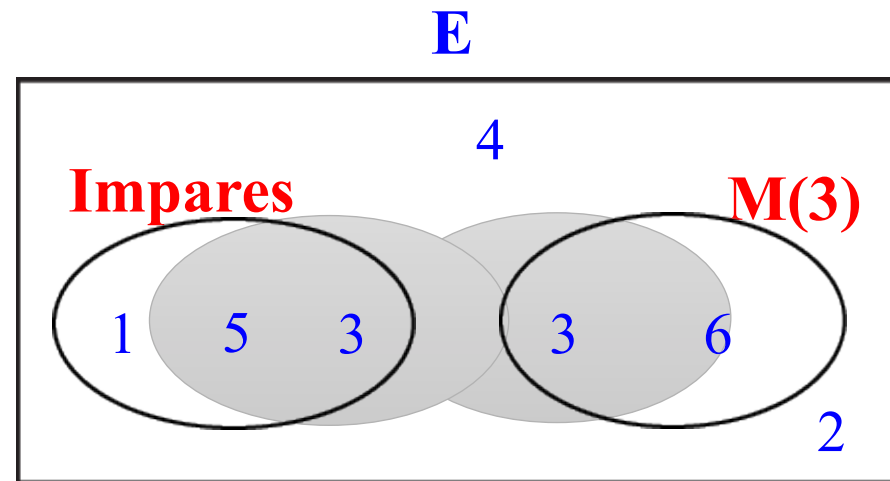


Ejemplo: Consideremos el experimento aleatorio de lanzar un dado, supóngase que el evento A consiste en sacar un número impar y el evento B sea *sacar múltiplo de 3*. Proceda a calcular, $A \cup B$.

Solución: Los números impares correspondientes a las caras del dado son: 1,3,5. Entonces el conjunto A se expresa por extensión así: $A = \{1,3,5\}$.

Los múltiplos de 3 correspondientes a las caras del dado son: 3 y 6. Entonces el conjunto B se expresa por extensión, así: $B = \{3,6\}$

Diagramas de Venn



$$A \cup B = \{1,3,5,6\}$$

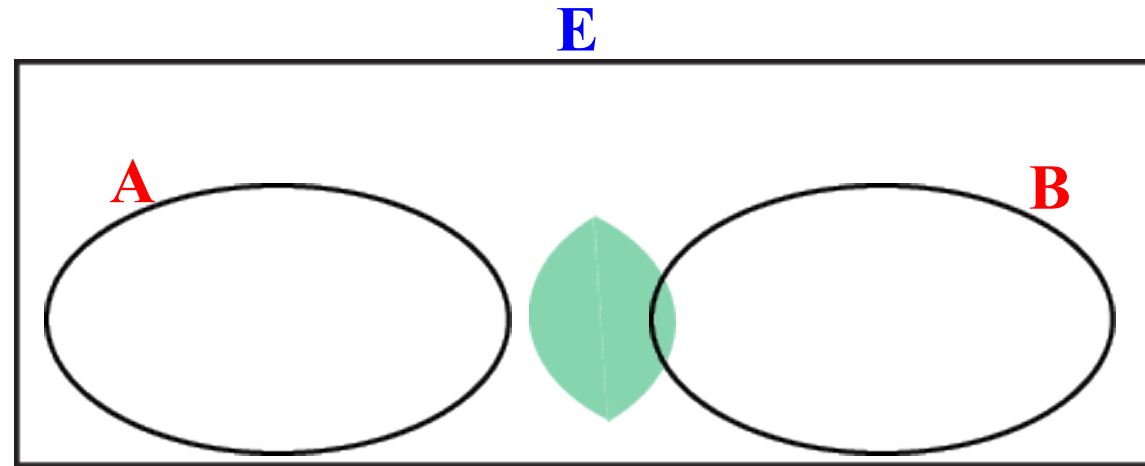
La intersección de eventos: Dado los eventos A y B del espacio muestral E, la intersección de A y B se denota por $A \cap B$, el cual se realiza, si y solo si, se realizan simultáneamente ambos eventos.

La intersección de dichos eventos se verifica cuando lo hace A y B.

$$x \in A \cap B \text{ entonces } x \in A \text{ y } x \in B$$

$A \cap B$ se lee como “**A intersección B**”. Dicha expresión es equivalente a $A \cap B$. Simbólicamente se expresa, así:

$$(A \text{ y } B) = A \cap B$$



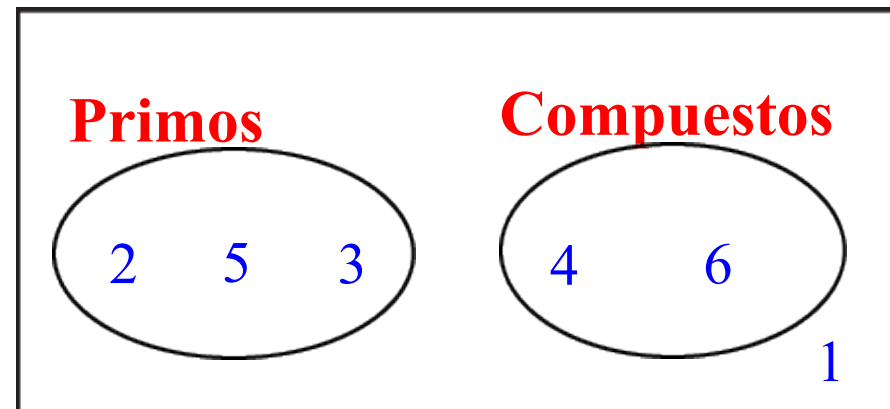
Ejemplo: Consideremos el experimento de lanzar un dado. Si el evento A consiste en sacar números primos y el evento B consiste en *sacar un número compuesto*. Proceda a calcular $A \cap B$.

Solución: Los números primos presentes en el dado son: 2,3,5. Entonces el conjunto A se expresa, por extensión, así: $A = \{2,3,5\}$.

Los números compuestos presentes en el dado son: 4 y 6. Entonces el conjunto B se expresa, por extensión, así: $B = \{4,6\}$.

Diagramas de Venn

E



$$A \cap B = \emptyset$$

Cantidad de elementos de un evento: La cantidad de elementos de un evento A , se denota

$$|A|$$

Si A es un evento de un espacio muestral E , el porcentaje de elementos de A respecto de E , lo denotaremos.

$$|A|_E$$

Ejemplo 1. Si $A=\{6,7,8,9\}$, entonces $|A|=4$

Ejemplo 2. Si $A=\{3,4,7,18,19\}$, entonces $|A|=5$

Ejemplo 3. Si $A=\emptyset$, entonces $|A|=0$



La expresión $(A \circ B)$ es otro conjunto formado con los elementos de ambos conjuntos, lo cual, por comprensión, se define así:

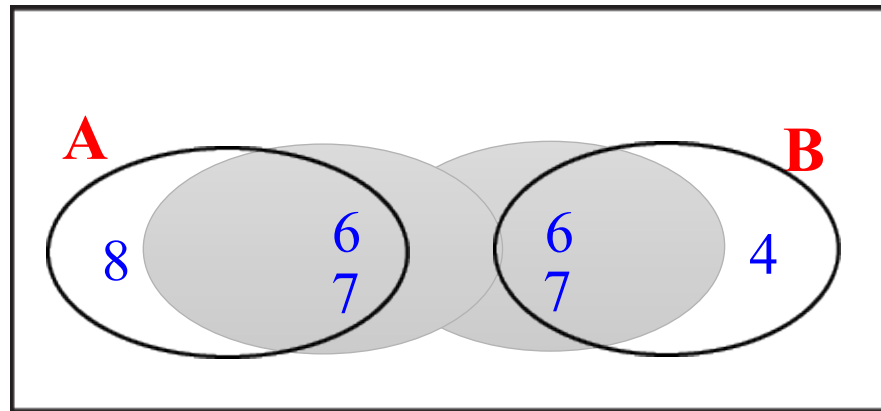
$$(A \circ B) = \{x / x \in A \circ x \in B\}$$

Ejemplo 1. Si $A = \{6, 7, 8\}$ y $B = \{4, 6, 7\}$, entonces $(A \circ B) = \{4, 6, 7, 8\}$

Observación: Los elementos repetidos se escriben solo una vez.

Diagramas de Venn

E



$$(A \circ B) = \{4, 6, 7, 8\}$$

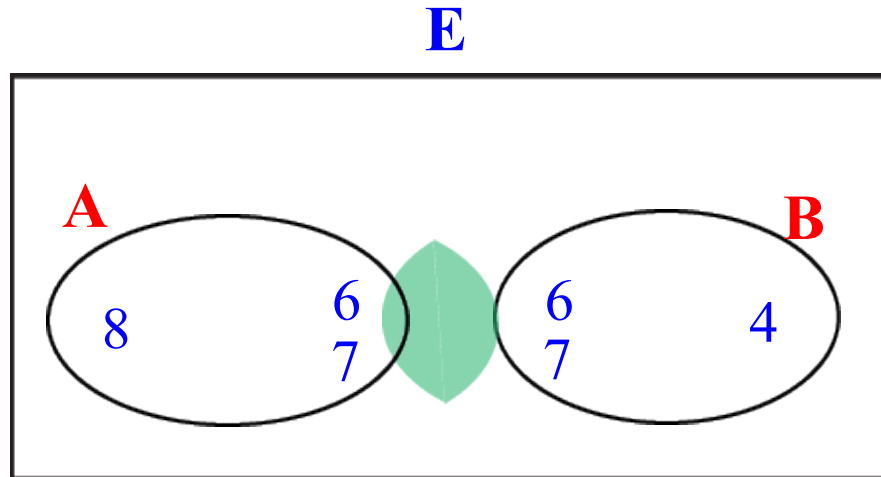
La expresión $(A \text{ y } B)$ es el conjunto de elementos que pertenecen, simultáneamente, a A y B, lo cual, por comprensión, se define así

$$(A \text{ y } B) = \{x / x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Ejemplo 1. Si $A = \{6, 7, 8\}$ y $B = \{4, 6, 7\}$, entonces $(A \text{ y } B) = \{6, 7\}$

Observación: Los elementos repetidos se escriben solo una vez.

Diagramas de Venn



$$(A \text{ y } B) = \{6, 7\}$$

Ejemplo 2. Si $A=\{2,3,5\}$ y $B=\{2,4,6\}$, entonces pruebe la siguiente igualdad:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Prueba

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|\{2,3,4,5,6\}| = |\{2,3,5\}| + |\{2,4,6\}| - |\{2\}|$$

$$5 = 3 + 3 - 1$$

$$5 = 5$$

Ejemplo 3. Si $A=\{2,3,5\}$ y $B=\{6,7,8,9\}$, entonces pruebe la siguiente igualdad:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Prueba

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|\{2,3,5,6,7,8,9\}| = |\{2,3,5\}| + |\{6,7,8,9\}| - |\emptyset|$$

$$7 = 3 + 4 - 0$$

$$7 = 7$$

Eventos independientes: Dos eventos A y B son independientes si el resultado del segundo evento no es afectado por el resultado del primero. El porcentaje de que ambos eventos ocurran, es el producto de los porcentajes de los eventos individuales. Esto lo expresamos porcentualmente así:

$$|A \text{ y } B|_E = |A|_E \cdot |B|_E$$

Ejemplo 1. Al lanzar dos monedas, el resultado de la primera moneda no afecta en nada al resultado de la segunda moneda. Por lo tanto, estos eventos son independientes.

Tiro 1

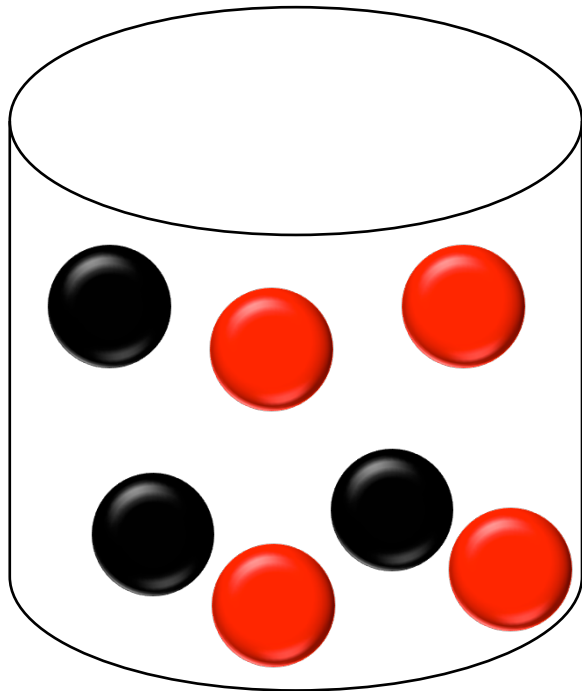


Tiro 2



Ejemplo 2. Un caso típico de eventos independientes es el muestreo con reposición, pues una vez tomada la muestra, se regresa de nuevo a la población de donde se obtuvo.

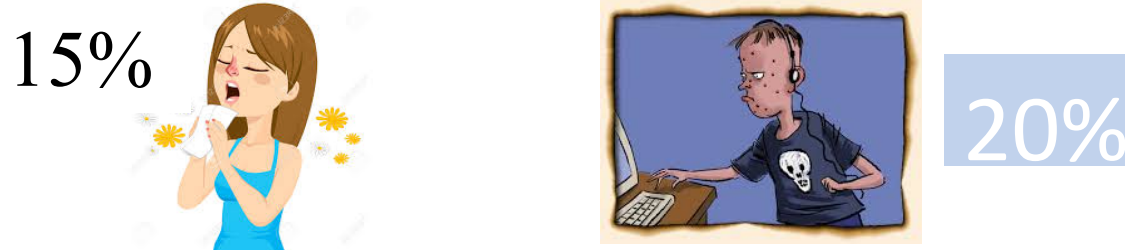
Ejemplo 3. En una urna hay 4 bolas rojas y 3 bolas negras. El evento A consiste en que, al extraer una bola, esta sea roja; y al realizar el evento B, se espera que la bola extraída sea negra. Si después de extraer una bola, y ver su color, esta se devuelve a la urna. En la siguiente extracción, el color de la bola es independiente del color de la primera extracción, por lo tanto, estos eventos son independientes.



Segunda extracción

Regresa la bola

Ejemplo 4. En un colegio, un 15% de los alumnos padecen de alergias, un 20% tienen acné. Proceda a determinar el porcentaje de estudiantes que padecen ambas dolencias.



Solución: Sea A el conjunto de quienes padecen alergias y B el conjunto de quienes tienen acné. La ocurrencia de A no afecta en nada a la ocurrencia de B, entonces A y B son eventos independientes. Para obtener el porcentaje de estudiantes que padecen ambas enfermedades, aplicamos la siguiente fórmula:

$$|A \text{ y } B|_E = |A|_E \cdot |B|_E = 15\% \cdot 20\% = 3\%$$

Por lo tanto, el porcentaje de alumnos que presentan dichas dolencias es el 3%, lo cual se expresa así:

$$|A \text{ y } B|_E = 3\%$$

Ejemplo 5. En un colegio un 20% de la población estudiantil practica fútbol, un 60% practica natación y un 68% practica fútbol o natación. Seguidamente, determine el porcentaje de alumnos que practican ambos deportes.

Solución: Sea F el conjunto que practica fútbol y N el conjunto que practica natación. La ocurrencia de F no afecta en nada a la ocurrencia de N, entonces F y N son eventos independientes y en consecuencia, podemos aplicar la siguiente fórmula:

$$|F \text{ y } N|_E = |F|_E \cdot |N|_E = 20\% \cdot 60\% = 12\%.$$

Por lo tanto, el porcentaje de estudiantes que practican ambos deportes es un 12%. Esto lo expresaremos así:

$$|F \text{ y } N|_E = 12\%$$

Ejemplo 6. En un pueblo el 10% de sus habitantes es vegetariano, un $x\%$ es católico y un 5% es vegetariano y católico. Determine el valor de x .

Solución: Sea V el conjunto de habitantes vegetarianos y C el conjunto de habitantes católicos. La ocurrencia de V no afecta en nada a la ocurrencia de C , entonces V y C son eventos independientes, y en consecuencia, procedemos a aplicar la fórmula:

$$5\% = |V|_E \cdot |C|_E$$

$$\frac{5}{100} = \frac{10}{100} \cdot \frac{x}{100}$$

$$50\% = x$$

Por lo tanto, el porcentaje de católicos es un 50%, lo cual se expresa así:

$$|C|_E = 50\%$$

Eventos dependientes:

Dos eventos A y B, son dependientes si el resultado de A afecta al resultado del evento B, y el porcentaje de que ambos eventos ocurran, es el producto de los porcentajes de los eventos individuales. Podemos expresarlo de la siguiente manera:

$$|A \text{ y } B| \downarrow E = |A| \downarrow E \cdot |B| \downarrow E$$

Ejemplo 1. Del conjunto $E=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ se extraen sin reemplazo, dos elementos al azar. ¿Cuál es el porcentaje de parejas en las cuales uno sea par y el otro sea impar? Acerca de este problema, expondremos dos soluciones distintas.

Solución 1. Sea P el conjunto de números pares e I el conjunto de impares. La ocurrencia de P afecta la ocurrencia de I , entonces P e I son eventos dependientes.

La ocurrencia de P es 3 de 7, y por ser P e I eventos dependientes, resulta que la ocurrencia de I será 4 de 6

$$|P \text{ y } I|_E = |P|_E \cdot |I|_E = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{6} \cdot 100 = \frac{1200\%}{42} \quad (1)$$

La ocurrencia de I es 4 de 7, y por ser I y P eventos dependientes, resulta que la ocurrencia de P es 3 de 6, en consecuencia, se sigue

$$|P|_E \cdot |I|_E = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot 100 = \frac{1200\%}{42} \quad (2)$$

De (1) y (2) se sigue que

$$|P \text{ e } I|_E = \frac{2400}{42} \% = 57.13\%$$

Solución 2. Otra forma de resolver este problema, es mediante una cuadrícula 7x7. En ella visualizaremos los 24 casos favorables que están en la región sombreada con gris y la totalidad de los casos posibles, que son 42, conforman el espacio muestral. Los que están tachados los eliminaremos por ser un experimento sin reemplazo.

Aplicando regla de tres, obtendremos el porcentaje correspondiente a las parejas que tienen un elemento par y otro impar.

$$24 \rightarrow x\%$$

$$42 \rightarrow 100\%$$

$$x = \frac{2400}{42} \%$$

$$x = 57,13\%$$

	1	2	3	4	5	6	7
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)	(7,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)	(7,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)	(7,3)
4	(1,4)	(2,4)	(4,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)	(7,4)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)	(7,5)
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)	(7,6)
7	(1,7)	(2,7)	(3,7)	(4,7)	(5,7)	(6,7)	(7,7)

Por lo tanto, el porcentaje de parejas con un elemento par y el otro impar es 57.13%

Sucesos complementarios:

Dos eventos, A y B , del espacio muestral E , son complementarios si no tienen elementos comunes y al unirlos, conforman el espacio E .

Ejemplo 1. Considere el experimento de lanzar sobre una mesa un par de dados y observar las caras orientadas hacia arriba. De este experimento se desea formar dos eventos A y B, tales que A esté conformado con los pares ordenados cuya suma de sus componentes sea menor que 7 y el B que contenga los pares ordenados cuya suma de sus componentes sea mayor o igual que 7. Determinar si A y B son eventos complementarios y el porcentaje de ocurrencia A o B.

Solución: El espacio muestral E, lo determinan todos los pares ordenados que conforman la siguiente cuadrícula 6x6.

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

Los 15 pares ordenados que contiene el evento A, cuya suma de componentes es menor que 7 son los que están sobre la diagonal y los 21 pares ordenados que contiene el evento B están sombreados con gris

$$A = \{(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (5,1)\}$$

$$B = \{(1,6), (2,5), (3,4), \dots, (6,6)\}$$

A y B son complementarios, puesto que

$$A \cap B = \emptyset \quad y \quad A \cup B = E$$

Por lo tanto,

$$B = A^C \quad o \quad A = B^C$$

El porcentaje de ocurrencia de A o B, lo calculamos, así: La ocurrencia de A es 15 de 36, y por ser A y B eventos independientes y complementarios, resulta que la ocurrencia de B es 21 de 36. Por lo tanto, se sigue que:

$$\begin{aligned} |A \cup B|_E &= |A|_E + |B|_E - |A \cap B|_E \\ &= \left(\frac{15}{36} + \frac{21}{36} - 0 \right) \cdot 100\% \\ &= 100\% \end{aligned}$$

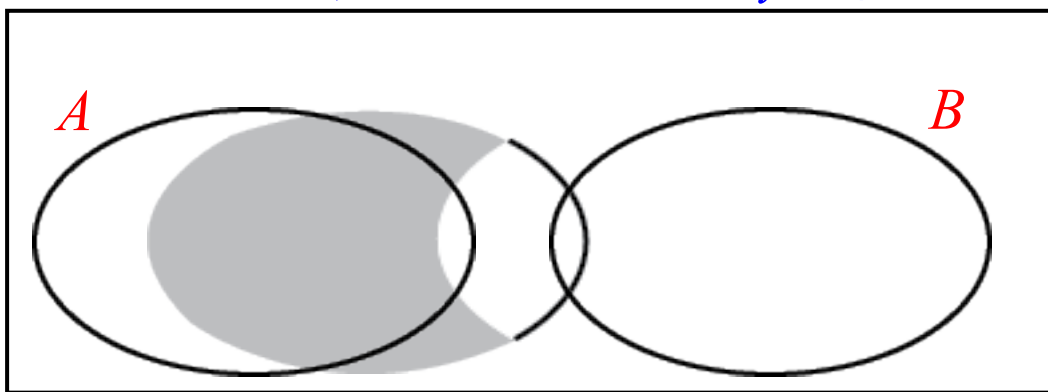


La diferencia de eventos:

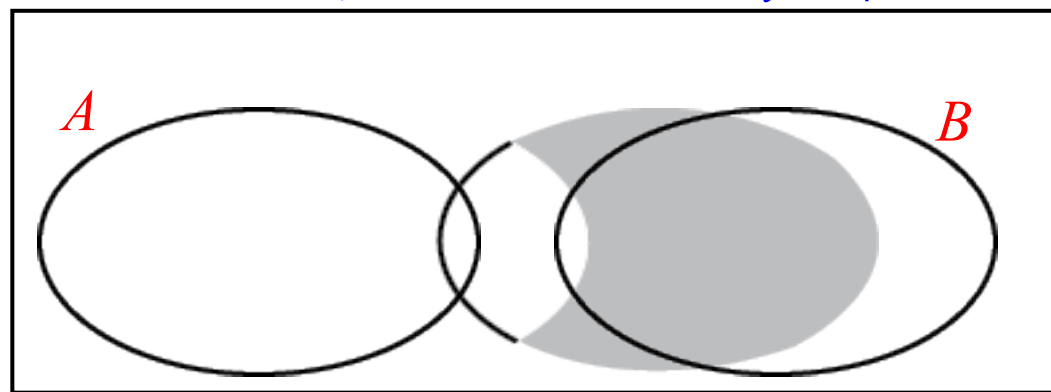
Dados los eventos A y B del espacio muestral E , la diferencia de A y B se denota por $A-B$, y es el evento formado por todos los elementos de A que no están en B .

Es decir, la diferencia de los eventos A y B se verifica cuando lo hace A y no B . Es decir,

Si $x \in A - B$, entonces $x \in A$ y $x \notin B$



Si $x \in B - A$, entonces $x \in B$ y $x \notin A$



La diferencia de eventos $A-B$ se lee como “**A menos B**”.

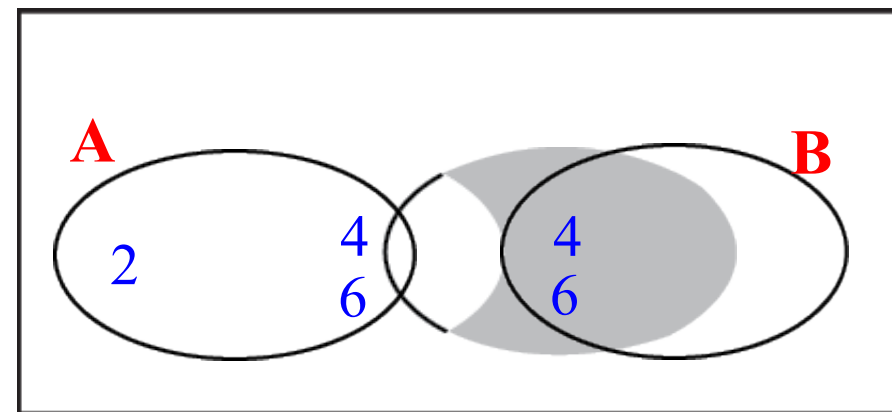
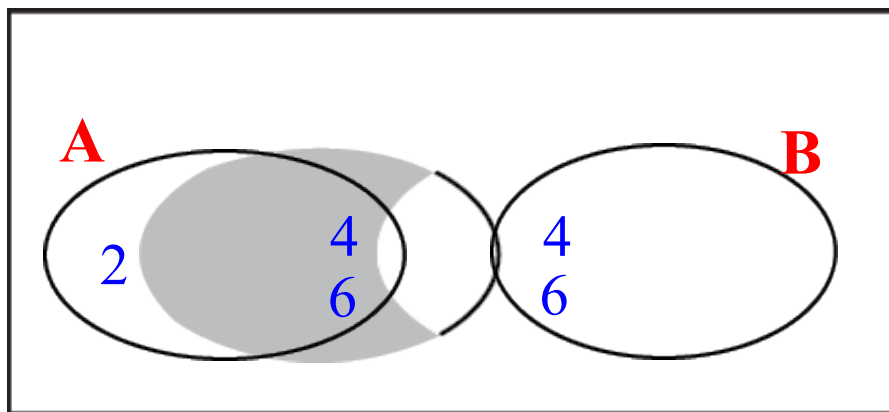
Ejemplo: Consideremos el experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado, si A corresponde a “sacar un número par” y B a “sacar un número compuesto “. Calculemos $A-B$ y $B-A$

Solución: Los números pares correspondientes a las caras del dado son: 2, 4, 6. Entonces, el conjunto A se expresa, por extensión, así: $A = \{2, 4, 6\}$

Los números compuestos correspondientes a las caras del dado son: 4 y 6. Entonces, el conjunto B se expresa, por extensión, así: $B = \{4, 6\}$.

El espacio muestral de este experimento aleatorio es el conjunto E , el cual se expresa por extensión así: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Finalmente, $A-B$ y $B-A$ son los conjuntos formados con los elementos que pertenecen al minuendo, pero no al sustraendo, lo cual en un diagrama de Venn, se representa, así:



Complemento del evento A:

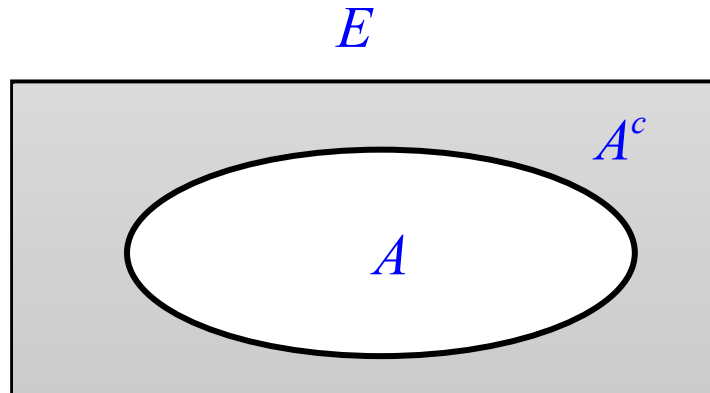
Dado el evento A del espacio muestral E , el evento A^c , recibe el nombre de evento contrario o complemento de A .

El evento A^c está formado con los elementos de E que no están en A . Lo cual, simbólicamente, se expresa así:

$$A^c = E - A$$

A^c se verifica siempre y cuando no se verifique A . Esto se expresa así:

Si $x \in A^c$ entonces $x \in E$ y $x \notin A$



Ejemplo. Consideremos el experimento aleatorio de lanzar un dado. Si el evento A consiste en sacar un número impar” y el evento B en *sacar múltiplo de 3*. Calcule: a) $A \uparrow C$, b) $B \uparrow C$, c) $(A \cup B) \uparrow C$, d) $(A \cap B) \uparrow C$ y e) $(A - B) \uparrow C$

Solución a): Los números impares correspondientes a las caras del dado son: 1, 3, 5. Entonces el conjunto A y el espacio muestral se expresan por extensión, respectivamente, así:

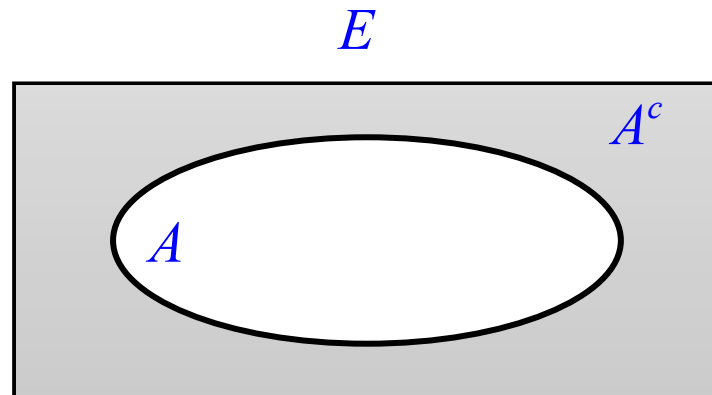
$$A = \{1, 3, 5\}$$

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Por lo tanto, el complemento de A son los elementos de E que no pertenezcan al conjunto A, es decir,

$$A^c = \{2, 4, 6\}$$

En el siguiente diagrama de Venn la región sombreada corresponde al complemento de A



$$A = \{1 \quad 3 \quad 5 \}$$

$$A^c = \{ 2 \quad 4 \quad 6 \}$$

Solución b): Los múltiplos de 3 correspondientes a las caras del dado son: 3,6. Entonces el conjunto B y el espacio muestral E se expresan por extensión, respectivamente, así:

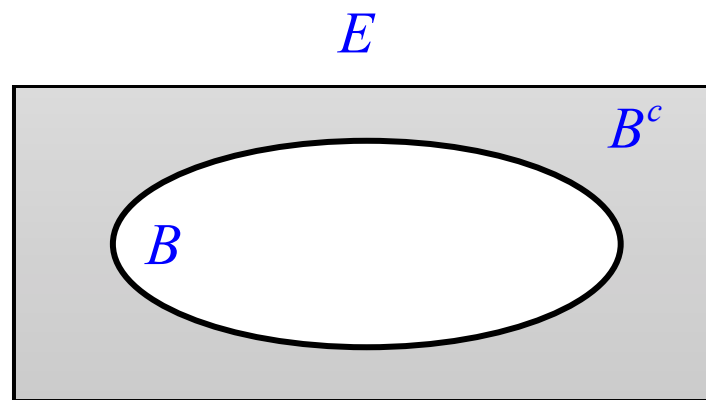
$$A = \{3, 6\}$$

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Por lo tanto, el complemento de B son los elementos de E que no pertenezcan al conjunto B, es decir.

$$B^c = \{1, 2, 4, 5\}$$

En el siguiente diagrama de Venn la región sombreada corresponde al complemento de B.



$$B = \{ 3 \quad 6 \}$$

$$A^c = \{ 1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \}$$

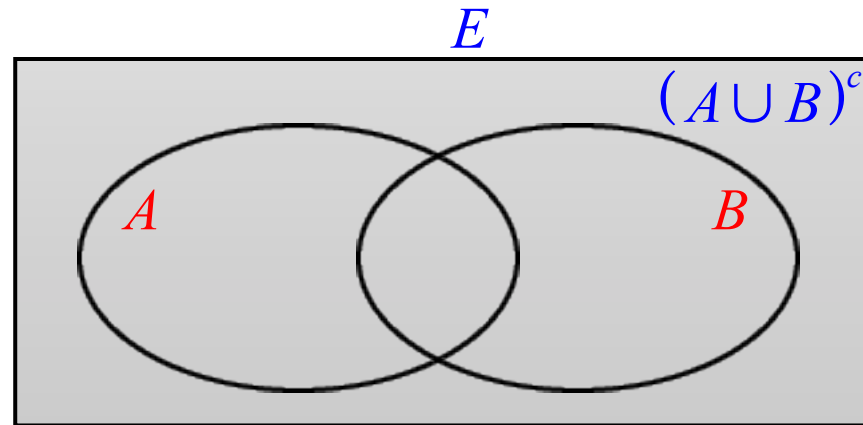
Solución c) Los conjuntos A , B y E se expresan por extensión respectivamente, así:

$$A = \{1, 3, 5\} \quad B = \{3, 6\} \quad E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Por lo tanto,

$$A \cup B = \{1, 3, 5, 6\} \Rightarrow (A \cup B)^c = \{2, 4\}$$

En el siguiente diagrama de Venn, la región sombreada corresponde al complemento de $A \cup B$.



$$A \cup B = \{1 \ 3 \ 5 \ 6\}$$

$$(A \cup B)^c = \{2 \ 4\}$$

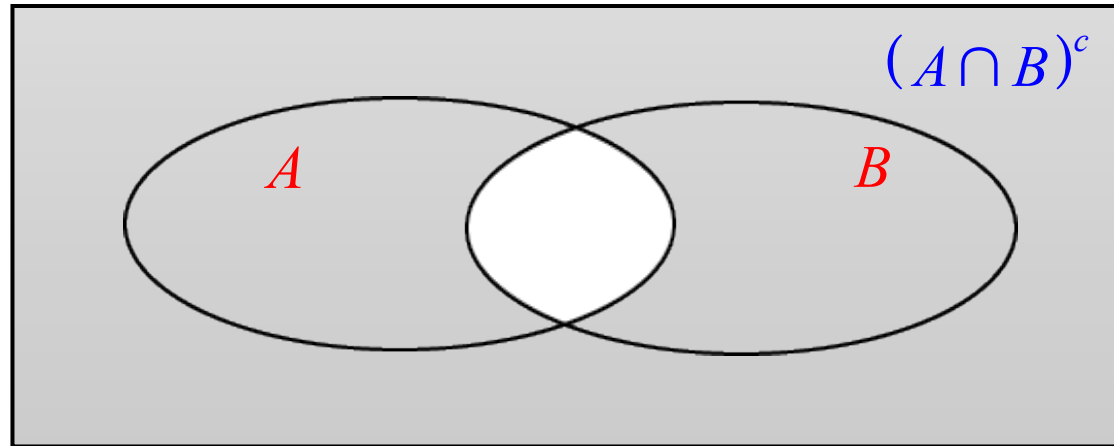
Solución d) Los conjuntos A, B y E se expresan por extensión, respectivamente, así:

$$A = \{1, 3, 5\} \quad B = \{3, 6\} \quad E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Por lo tanto,

$$A \cap B = \{3\} \Rightarrow (A \cap B)^c = \{1, 2, 4, 5, 6\}$$

En el siguiente diagrama de Venn la región sombreada corresponde al complemento de $A \cap B$.



$$A \cap B = \{3\}$$

$$(A \cap B)^c = \{1 \ 2 \ 4 \ 5 \ 6\}$$

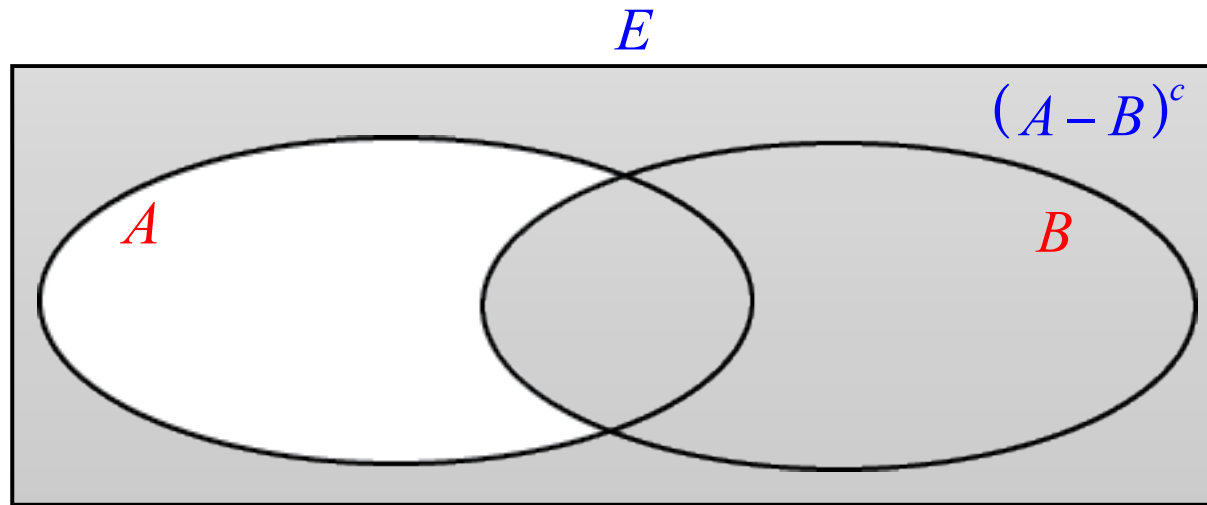
Solución e) Los conjuntos A, B y E se expresan por extensión respectivamente, así:

$$A = \{1, 3, 5\} \quad B = \{3, 6\} \quad E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Por lo tanto,

$$A - B = \{1, 5\} \Rightarrow (A - B)^c = \{2, 3, 4, 6\}$$

En el siguiente diagrama de Venn la región sombreada corresponde al complemento de $(A - B) \uparrow C$



$$A - B = \{1 \ 5\}$$

$$(A - B)^c = \{2 \ 3 \ 4 \ 6\}$$

Ejemplo 5: Debemos demostrar que $A - B = A \cap B^c$

Demostración:

$$x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \quad y \quad x \notin B$$

$$\Leftrightarrow x \in A \quad y \quad x \in B^c$$

$$\Leftrightarrow x \in A \cap B^c$$

$$\therefore A - B = A \cap B^c$$

Ejemplo 6: Primera ley de De Morgan $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Demostración: $x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cup B$
 $\Leftrightarrow x \notin A \text{ y } x \notin B$
 $\Leftrightarrow x \in A^c \text{ y } x \in B^c$
 $\Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c$
 $\therefore (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Ejemplo 7: Segunda ley de De Morgan $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Demostración: $x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cap B$
 $\Leftrightarrow x \notin A \text{ o } x \notin B$
 $\Leftrightarrow x \in A^c \text{ o } x \in B^c$
 $\Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$
 $\therefore (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

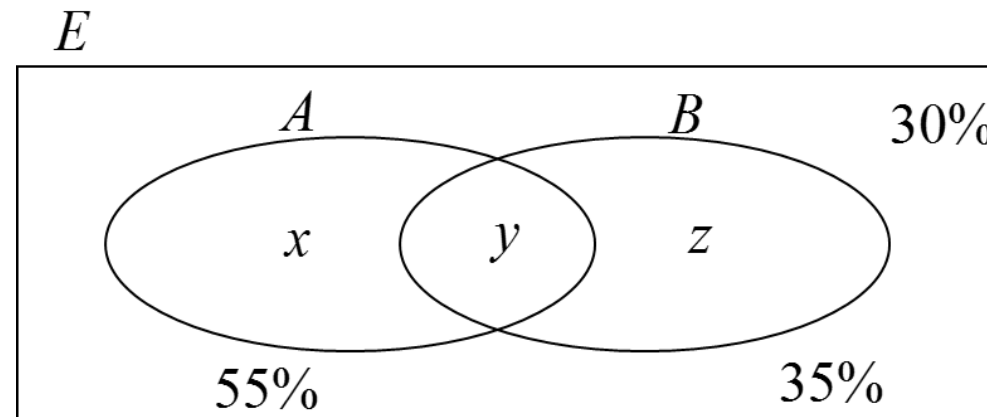


Augustus De Morgan (1806 – 1871)

Ejemplo 8: Supongamos que de los jugadores inscritos en el campeonato de fútbol de primera división, un 55% tienen menos de 25 años y un 35% tienen contrato por dos años o más. Además, un 30% tiene más de 25 años, y cuentan con un contrato menor a dos años. Utilice esta información para determinar:

- I. El porcentaje de futbolistas inscritos que tengan menos de 25 años o cuenten con un contrato de dos o más años.
 - II. El porcentaje de futbolistas inscritos que tengan 25 o más años.
 - V. Si en total hay 260 futbolistas debidamente inscritos, ¿cuántos de ellos tienen 25 años o más y tienen un contrato menor de dos años.
- (Tomado del programa pág. 447)**

Solución: Sea A el evento de los futbolistas que tienen menos de 25 años, B el evento de los futbolistas que tienen un contrato por dos o más años. Entonces la información proporcionada se puede resumir en el siguiente diagrama:



El espacio muestral E incluye el 100% de los futbolistas, el evento A un 55%, el evento B incluye un 35% de ellos y un 30% de los futbolistas que tienen 25 años o más.

Los porcentajes x, y, z los calcularemos así:

$$x + y + z + 30\% = 100\%$$

$$x + y + z = 70\% \quad (1)$$

$$x + y = 55\% \quad (2) \quad y + z = 35\% \quad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1) se sigue

$$55\% + z = 70\% \quad x + 35\% = 70\%$$

$$z = 15\% \quad (4) \quad z = 35\% \quad (5)$$

Sustituyendo (4) y (5) en (1) obtenemos el porcentaje y

$$35\% + y + 15\% = 70\%$$

$$y = 20$$

Solución i) El porcentaje de futbolistas inscritos que tengan menos de 25 años o cuenten con un contrato de dos o más años. Lo calculamos, así:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B| = 55\% + 35\% - 20\% = 70\%$$

Respuesta i) El 70% de los futbolistas inscritos tienen menos de 25 años o cuentan con un contrato de dos o más años.

Solución ii) El porcentaje de futbolistas inscritos que tengan 25 o más años es el porcentaje del complemento de del evento A y este lo calculamos, así:

$$|A^c|_E = 100\% - |A| = 100\% - 55\% = 45\%$$

El 45% de los futbolistas inscritos tienen 25 o más años.

Solución iii) Si en total hay 260 futbolistas debidamente inscritos, ¿cuántos de ellos tienen 25 o más años y tienen un contrato menor de dos años.

Esto es el complemento de A intersecado con el complemento de B, lo cual calculamos, así:

$$\begin{aligned} |A^c \cap B^c|_E &= |(A \cup B)^c| \\ &= 100\% - |A \cup B|_E \\ &= 100\% - 70\% \\ &= 30\% \end{aligned}$$

El 30% de 260 se obtiene, así:

$$\frac{30}{100} \cdot 260 = 78$$

Respuesta iii) 78 futbolistas inscritos tienen 25 o más años y tienen un contrato menor de dos años.

Resumen de fórmulas

1. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
2. $A^c = E - A$
3. $A - B = A \cap B^c$
4. $|A^c|_E = 100\% - |A|_E$
5. $A^c = E - A$
6. Ley N°1: de De Morgan $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
7. Ley N°2: de De Morgan $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
8. $|A \text{ y } B|_E = |A|_E \cdot |B|_E$, siendo A y B eventos dependientes e independientes

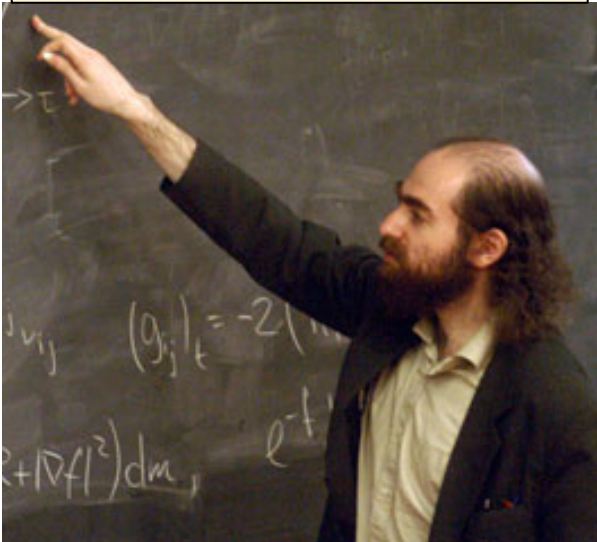
Perelman rechaza un millón de dólares:

Desinteresado por la fama y el dinero. Grigori Perelman siguiendo un proceso que deforma la métrica de Riemann logró demostrar en el 2002 la **conjetura de Poincaré**, el cual es uno de los 7 problemas del milenio y por el cual Clay Mathematics Institute ofrecía un millón de dólares por la solución correcta. Perelman rechazó el millón de dólares y la medalla Fields en 2006, la cual es el equivalente matemático del Premio Nobel. Perelman vive en San Petersburgo con su madre y no quiere hablar con los periodistas que, según él, solo se interesan por saber por qué rechazó el millón de dólares y si se corta las uñas. Él dice. “ No quiero ser exhibido como un animal en un zoológico.” Perelman no considera que su contribución sea mayor que la del matemático estadounidense Richard Hamilton, quien introdujo la técnica del flujo de Ricci sobre la que construyó su prueba. La humildad y pureza de su propósito le ha hecho ganar admiración alrededor del mundo.

Lo difícil se vuelve fácil con la práctica

La matemática la aprendemos **mediante la práctica**, este es un **proceso natural del aprendizaje**. Cuanto más practicamos, más fluidos somos. Si lo hacemos constantemente, entraremos en un ciclo de rendimiento acelerado y los procesos los realizaremos con más facilidad: en consecuencia, esto nos motivará a practicar más horas, incrementaremos nuestra habilidad para construir razonamientos complicados y aumentaremos el interés por seguir ejercitándonos, con el propósito en mente de incrementar inteligencia. Llevar a cabo este proceso nos demostrará que los obstáculos se superen con practicar.

13 de junio de 1966 (50 años)
Leníngrado, URSS



«No quiero estar expuesto como un animal en el zoológico. No soy un héroe de las matemáticas. Ni siquiera soy tan exitoso. Por eso no quiero que todo el mundo me esté mirando»

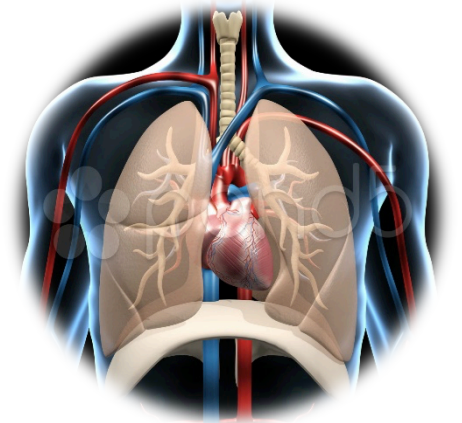
La voluntad es la herramienta más poderosa

La voluntad no tiene nada de mágico, es una conjugación armoniosa de las cualidades físicas con las intelectuales.

No todas las personas nacen con una complexión física satisfactoria, no obstante, aun las más débiles pueden llegar a ser fuertes y resistentes, si cumplen un metódico plan de ejercicios físicos, buena alimentación y costumbres sanas.

Algunas de estas recomendaciones metódicas pueden ser:

- 1) Por la mañana, al levantarse, haga ejercicios respiratorios frente a una ventana abierta o al aire libre.
- 2) Beba agua en abundancia. No solo contribuye a mejorar las funciones digestivas, también facilita los procesos mentales.



Las cualidades intelectuales mediante la ejercitación de la voluntad mejoran las siguientes ramas del intelecto:

1) Memoria.

2) Imaginación

4) Intuición

5) Asociación de ideas y comprensión.

No se canse usted de formularse preguntas y más preguntas sobre los aspectos que más le intrigan, aunque a veces le parezcan absurdas o inútiles. Si usted medita asiduamente, con el tiempo obtendrá respuestas adecuadas a sus preguntas.

Problema 1. Considerando que A y B son eventos de un experimento aleatorio. Analice las siguientes proposiciones:

- i) La unión de A y B es otro evento que ocurre siempre que ocurre A o siempre que ocurre B.**
- ii) La intersección de A y B es otro evento que ocurre siempre que ocurre A y B simultáneamente.**

De las proposiciones anteriores, ¿cuáles son verdaderas?

- A) Ambas**
- B) Ninguna
- C) Solo la i)
- D) Solo la ii)

Problema 2. Considerando que A es un evento de un experimento aleatorio, analice las siguientes proposiciones:

- i. El complemento de A es otro evento que ocurre siempre que no ocurre A .
- ii. $A \cap A^c$ es un evento imposible

De las proposiciones anteriores, ¿cuáles son verdaderas?

- A) *Ambas*
- B) *Ninguna*
- C) *Solo la i)*
- D) *Solo la ii)*

Problema 3. Considerando que A y B sean eventos de un experimento aleatorio, analice las siguientes proposiciones:

i) Si $A \cap B \neq \emptyset$, entonces A y B son eventos mutuamente excluyentes.

iii) Se dice que A está contenido en B si siempre que ocurra A, ocurre B, se denota $A \subset B$

De las proposiciones anteriores, ¿cuáles son verdaderas?

A) Ambas

B) Ninguna

C) Solo la i)

D) Solo la ii)

Problema 4. Considerando que A es un evento de un experimento aleatorio, analice las siguientes proposiciones:

i) Si A se puede descomponer en dos o más eventos más simples de manera que la unión de ellos sea el evento A , entonces A es un evento compuesto.

ii) Si A no puede ser descompuesto en sucesos más simples, entonces A es un evento elemental.

De las proposiciones anteriores, ¿cuáles son verdaderas?

A) Ambas

B) Ninguna

C) Solo la i)

D) Solo la ii)

Problema 5. Consideremos el experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado, si el evento A corresponde a sacar un número primo y el evento B en *sacar número múltiplo de 3*, analice las siguientes proposiciones:

i) Si A y B son compatibles no tienen por qué ser dependientes.

ii) Si A y B son independientes, entonces sus complementos también son independientes.

De las proposiciones anteriores, ¿cuáles son verdaderas?

A) Ambas

B) Ninguna

C) Solo la i)

D) Solo la ii)

Problema 6. Considerando que A y B son eventos del espacio muestral E, analice las siguientes proposiciones:

i) $A \cap C = E - A$ y $B = E - B \cap C$

ii) $A \cup B = E$ y $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cap C = B$

De las proposiciones anteriores, ¿cuáles son verdaderas?

A) *Ambas*

B) *Ninguna*

C) *Solo la i)*

D) *Solo la ii)*

Problema 7. Considerando que A y B son eventos del espacio muestral E, analice las siguientes proposiciones:

i) $A \cap C = B \text{ y } B \cap C = A \Rightarrow A \cup B = E$

iii) $A - B = \emptyset \text{ y } A \cup B = E \Rightarrow A \cap C = B - A$

De las proposiciones anteriores, ¿cuáles son verdaderas?

A) *Ambas*

B) *Ninguna*

C) *Solo la i)*

D) *Solo la ii)*

Problema 8. Considerando que A y B son eventos del espacio muestral E, el cual está asociado al experimento aleatorio de lanzar un dado, analice las siguientes proposiciones:

i) $A=\{1,2,6\}$ y $B \uparrow C = A \Rightarrow B=\{3,4,5\}$

iii) $A=\{3,5\}$ y $B=\{5,6\} \Rightarrow A \uparrow C \cap B \uparrow C = \{5\}$

De las proposiciones anteriores, ¿cuáles son verdaderas?

A) *Ambas*

B) *Ninguna*

C) *Solo la i)*

D) *Solo la ii)*

Problema 9. Considerando que A y B son eventos del espacio muestral E, analice las siguientes proposiciones:

i) $A \cap C = \{2, 4, 6\}$ y $A \cup B = E \Rightarrow \{2, 4\} \subset B$

ii) $B \cap C = \{1, 3, 6\}$ y $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \{3, 6\} \subset A$

De las proposiciones anteriores, ¿cuáles son verdaderas?

A) *Ambas*

B) *Ninguna*

C) *Solo la i)*

D) *Solo la ii)*

Problema 10. Considerando que A y B son eventos del espacio muestral E, analice las siguientes proposiciones:

i) $(A - B) \cap C = \{2, 4, 5\} \Rightarrow B = \{2, 4, 5\}$

ii) $(A \cap C) \cap C = B$ y $A = \{2, 3, 5\} \Rightarrow \{2, 5\} \subset B$

De las proposiciones anteriores, ¿cuáles son verdaderas?

A) Ambas

B) Ninguna

C) Solo la i)

D) Solo la ii)

Problema 11. Considerando que A y B son eventos del espacio muestral E, analice las siguientes proposiciones:

i) $(A \cup B) \uparrow C = \{2, 4\} \Rightarrow A \uparrow C \cap B \uparrow C = \{2, 4\}$

ii) $A \uparrow C \cup B \uparrow C = \{3, 5\} \Rightarrow (A \cap B) \uparrow C = \{3, 5\}$

De las proposiciones anteriores, ¿cuáles son verdaderas?

A) Ambas

B) Ninguna

C) Solo la i)

D) Solo la ii)

Problema 12. Consideremos el experimento aleatorio que consiste en sacar dos bolas sin reposición de una urna que contiene 3 bolas rojas y 2 negras, el evento A sea "sacar dos bolas de diferente color " y el evento B sea "sacar dos bolas y que al menos una sea roja". Entonces $(A-B) \cup (B-A)$ es igual a:

A) $(A \cup B) - (B - A)$

B) $(A \cap B) - (A - B)$

C) $(A \cap B) - (A \cup B)$

D) $(A \cup B) - (A \cap B)$

Problema 13. Consideremos el experimento aleatorio que consiste en sacar dos bolas sin reposición de una urna que contiene 3 bolas rojas y 2 negras, el evento A sea "sacar dos bolas de diferente color " y el evento B sea "sacar dos bolas y que al menos una sea roja". Entonces $A \cap B$ es igual a

A) $E - (A \cap B)$

B) $E - (A \cup B)$

C) $E - (A^c \cup B^c)$

D) $E - (A^c \cap B^c)$

Problema 14. Consideremos el experimento aleatorio que consiste en sacar tres bolas de una urna sin reposición, en la cual hay 3 bolas blancas, 2 rojas y 1 negra, si del espacio muestral asociado a este experimento, el evento A es que “las tres bolas sean de diferente color” y el evento B es que “al menos una sea negra”. Analice las siguientes proposiciones:

$$i) A \cap B = A \quad \text{ii) } A \cup B = B.$$

De las proposiciones anteriores, ¿cuáles son verdaderas?

A) Ambas

B) Ninguna

C) Solo la i)

D) Solo la ii)

Problema 15. Considere el experimento de lanzar sobre una mesa un par de dados y observar las caras orientadas hacia arriba. De este experimento se desea formar dos eventos A y B, tales que A esté conformado con los pares ordenados cuya suma de sus componentes sea menor que 8 y el B que contenga los pares ordenados cuya suma de sus componentes sea mayor que 6. ¿Cuál es el porcentaje de ocurrencia A y B?

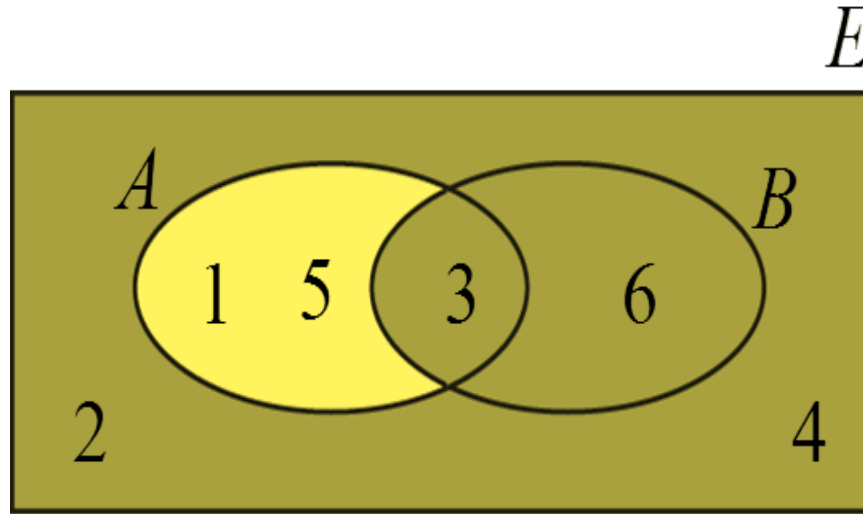
A) 20%

B) 25%

C) 10%

D) 15%

Las preguntas 16 y 17 contéstelas de acuerdo con el siguiente diagrama de Venn



Problema 16. La región sombreada de espacio muestral E , corresponde a la operación

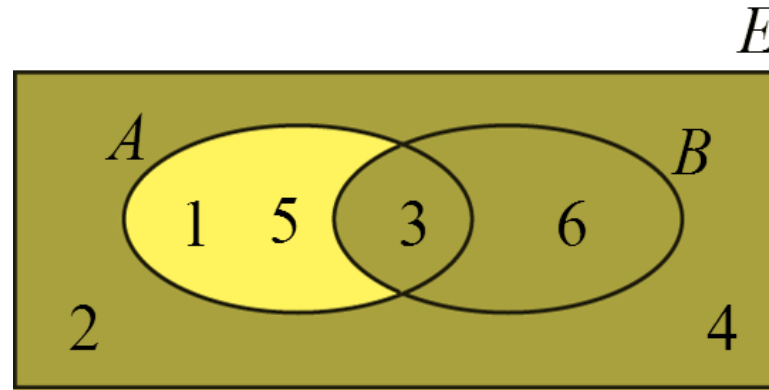
A) $(A - B)^c$

B) $(B - A)^c$

C) $(A \cap B)^c$

D) $(A \cup B)^c$

Las preguntas 16 y 17 contéstelas de acuerdo con el siguiente diagrama de Venn



Problema 17. De acuerdo con la región sombreada del espacio muestral E, analice las siguientes proposiciones.

i) $[A - (A \cap B)] \uparrow C$ representa la región sombreada.

ii) $[A - (A \cup B)] \uparrow C$ representa la región sombreada.

De las proposiciones anteriores, ¿cuáles son verdaderas?

A) Ambas

B) Ninguna

C) Solo la i)

D) Solo la ii)

Problema 18. Si A y B son eventos de un espacio muestral E, tal que $A \cap B = \emptyset$ entonces con toda certeza podemos afirmar que

A) $A \cup B = E$

B) $A^c \cup B^c = E$

C) $A^c \cap B^c = \emptyset$

D) $A^c \cup B = E$

Problema 19. Si A y B son eventos del espacio muestral E , analice las siguientes proposiciones.

i) $A \cup B = E \Rightarrow A \cap C \cap B \cap C = \emptyset$.

ii) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cap C \cup B \cap C = E$.

De las proposiciones anteriores, ¿cuáles son verdaderas?

A) Ambas

B) Ninguna

C) Solo la i)

D) Solo la ii)

Problema 20. Supongamos que de los estudiantes de undécimo año de cierto colegio, un 46% tienen menos de 17 años y un 40% son repitentes. Además, un 10% tienen menos de 17 años y son repitentes. De acuerdo con esta información analice las siguientes proposiciones:

- i) El 24% de los estudiantes tienen más de 17 años y no son repitentes.
- ii) El 54% de los estudiantes tienen 17 años o más.

De las proposiciones anteriores, ¿cuáles son verdaderas?

A) Ambas

B) Ninguna

C) Solo la i)

D) Solo la ii)

Problema 21. ¿Cuántas ternas ordenadas se pueden formar con los elementos del conjunto $\{2,3,4,5\}$ tomando al azar uno de los elementos y devolviéndolo al conjunto y así sucesivamente hasta formar todas las posibles ternas?

A) 24

B) 27

C) 48

D) 64

Problema 22. Supongamos que los estudiantes de undécimos año de cierto colegio son 200, un 46% tienen menos de 17 años y un 40% son repitentes. Además, un 24% tienen más de 17 años y no son repitentes. De acuerdo con esta información, analice las siguientes proposiciones:

i) El 152 de los estudiantes tienen menos de 17 años o más o son repitentes.

ii) El 24% de los estudiantes tienen 17 años o más.

De las proposiciones anteriores, ¿cuáles son verdaderas?

A) Ambas

B) Ninguna

C) Solo la i)

D) Solo la ii)

Problema 23. Supongamos que los estudiantes de undécimos año de cierto colegio son 600, un 40% hablan inglés y un 80% hablan francés. De acuerdo con esta información, analice las siguientes proposiciones:

- i) 120 estudiantes son bilingües.
- ii) 360 estudiantes solo hablan francés.

De las proposiciones anteriores, ¿cuáles son verdaderas?

A) Ambas

B) Ninguna

C) Solo la i)

D) Solo la ii)

Problema 24. Supongamos que de los estudiantes de undécimos año de cierto colegio, un 30% practica el fútbol, un 40% no practican ni fútbol ni baloncesto y un 10% ambos deportes. De acuerdo con esta información, analice las siguientes proposiciones:

i) El 20% de los estudiantes practican fútbol, pero no baloncesto.

ii) El 30% de los estudiantes practican baloncesto, pero no fútbol.

De las proposiciones anteriores, ¿cuáles son verdaderas?

A) Ambas

B) Ninguna

C) Solo la i)

D) Solo la ii)

Teoría de conjuntos aplicada a las Probabilidades



**”Si quieres triunfar, no te quedes mirando la escalera.
Empieza a subir, escalón por escalón,
hasta que llegues arriba”**



www.academia-amp.com
facebook.com/mateapm
2222 - 2314 / 2258 - 5376